16
~~12.~~ アル continuum ノツクル空間

井関清志（阪大）
（1946. XII 9 受付）

continuum ニ関スル問題ト indecomposable continuum ノツクル hyperspace ニ一ミノ結果ヲ生シタノデ, ソレヲ中心ニシテ述ベテミヨウ。

§1. hyperspace

n-dim. Euclid space ニアル固定シタ bounded continuum (closed connected set) ヲ C トスル。C ノスベテノ subcontinuum (空集合ヲ除ク) ヲ element トスル space $\mathcal{E}$ ニ次ノ metric ヲ導入スル。即チ $\mathcal{E}$ ノ二点 $A \cdot B$ ノ距離 $\rho^*(A \cdot B)$ ヲ

$$\rho^*(A \cdot B) = \mathrm{Max}\left(\sup_{x \in A} \rho(x \cdot B),\ \sup_{y \in B} \rho(A \cdot y)\right)$$

コヽニ ρ ハ元ノ空間ノ metric トスル。コノ ρ^* ニ関シテ $\mathcal{E}$ ハ metric space ヲ作ル。コノ $\mathcal{E}$ ヲ C ノ hyperspace. トイフ。

$\boxed{\text{定理 1.1.}}$ $\mathcal{E}$ ハ ρ^* ニ関シテ complete metric space ニナル。又 ρ^* ニ関シテ $\mathcal{E}$ ハ bicompact ナ arc-wise connected ノ continuum ヲ作ル。

(証明) C ノスベテノ closed subset ノ作ル space ハ ρ^* ニ関シテ complete metric space ヲツクル。[1] 次ニ $\mathcal{E}$ ノ Cauchy sequence $\{A_n\}$ $(n=1 \cdot 2, \cdots\cdots)$ ヲトレバ, ρ^* ニ関シテ A_n ハ空デナイ一ツノ closed set ニ収斂スル。[2] コレヲ A トスレバ, A_n ハ A ニ集合系列収斂シテヰルカラ, A_n ガスベテ continuum デアルカラ, A ガ亦 continuum ニナル。[3] 即チ $\mathcal{E}$ ハ complete space ニナル。ソノ他ノ諸性質ハ S. Mazurkiewicz ト K. Borsuk [4] ノ論文ノ中ニ含マレテヰルカラ略サウ。

$\boxed{\text{定理 1.2}}$ $\mathcal{E}$ 内ノ closed set $\mathfrak{A}$ ニ対シテ $\mathfrak{A}$ ノスベテノ A ヲ C 中ノ continuum トシテ

$$H = \sum_{A \in \mathfrak{A}} A$$

---

1) H. Hahn ; Reell Funktionen (1932) p124

2) H. Hahn ; loc cit.

3) K. Menger ; Kurventheorie (1932) p.50

4) S. Mazurkiewicz et K. Borsuk ; C.R. de Varsovie 24 (1932) p.149

トオケバ，H ハ C ノ closed subset ニナル。（コノ H ヲ $\mathfrak{A}$ ノ C ヘノ projection トイフ。）又 $\mathfrak{A}$ ガ continuum ナラバ H ハ C ノ subcontinuum ニナル。

（証明）H ガ closed set ニナルコト，モシ H カ closed set デナケレバ，

$$H \not\ni p \qquad \overline{H} \ni p$$

ナル p ガアル。p ヲ中心トスル半径 $\frac{1}{n}$ ノ sphere $U_n(p)$ ヲトレバ $U_n(p)\,H \neq 0$ カラ $U_n(p)\,H \ni p_n$ ヲトレバ p_n ヲ含ム $\mathfrak{A}$ ノ点ガアル。即チコレヲ A_n トスレバ，$\mathfrak{A}$ ノ bicompactness ニヨリ，A_n ノ subsequence A_{n_i} $(i=1,2,\cdots)$ デ C ノ subcontinuum A ニ収斂スルモノガアル。p_{n_i} $(i=1,2,\cdots)$ ハ亦 p ニ収斂スルカラ，$A \ni p$ デナケレバナラヌ。故ニ $A \in \mathfrak{A}$ ヨリ $p \in H$ トナリ，コレハ不合理。

$\mathfrak{A}$ ガ continuum ノトキ H ガ continuum デナケレバ H ハ二ツノ空デナイ disjoint ナ closed set ニ separate スル。コレヲ A, B トスレバ $\rho(A,B)>0$ デ $\mathfrak{A}$ ノ点ハ A ト B ノ何レカ一方ニ属スル。$\mathfrak{A}$ ノスベテノ点ヲ $\mathfrak{A}_A$ 然ラサル $\mathfrak{A}$ ノ点ヲ $\mathfrak{A}_B$ トスレバ $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_A + \mathfrak{A}_B$ トワカシテ $\rho^*(\mathfrak{A}_A, \mathfrak{A}_B)>0$ トナル。即チ $\mathfrak{A}$ ノ連絡性ニ反スル。

定理1 3 C ノ任意ノ connected subset A ノ各点ニ対デスル $\mathcal{E}$ ノ各点ノ作ル $\mathcal{E}$ ノ subset ノ closure ハ $\mathcal{E}$ ノ subcontinuum ヲ作ル。コノ定理ハ今必要ナイカラ証明ヲ略シテオカウ。

§2. perfectly indecomposable continuum

continuum C ガ C ノ proper subcontinuum ノ二ツノ和デ表ハサレナイトキ，C ヲ indecomposable continuum トイヒ，C ノスベテノ subcontinuum ガ indecomposable ノトキ C ヲ perfectly indecomposable トイフ。[51]

定理2.1 C ガ perfectly indecomposable continuum ナルタメノ必要且充分ナル条件ハ，C ノ任意ノ二ツノ subcontinuum A, B ヲトレバ，

---

51) C. Kuratowski et Z. Janiszewski, F.M. vol 1 B. Knaster F.M. vol 3

A B ガ [illegible] ノ [illegible] A C B ノ何レカ一ツガ成立スルコト。即チ H−B キシキ B−A ナル subcontinuum A. B が存在シナイコト。

(証明) 必要ナコト　モシ $A-B \neq 0 \neq B-A$ ナル subcontinuum A, B ガアレバ A+B ハ C ノ一ツノ subcontinuum デ decomposable デアル。コレハ不合理。

充分ナコト. モシ C ガ D ナル decomposable continuum ヲ含メバ D ハ D ノ proper subcontinuum A. B ノ和デ表ハサレルカラ, $A-B \neq 0 \neq B-A$ トナル。　(終)

A. B ヲ disjoint ナ集合, M ヲ continuum トスル時 $MA \neq 0 \neq MB$ 且 M ノ proper subcontinuum ハ A B ノ点ヲ同時ニ含マナイトキ M ハ A ト B トニ関シテ atomic デアルトイフ。[6] M ガ bounded continuum ヲ A. B ガ disjoint ナ closed subset トスレバ, M ハ A, B ニ関シテ atomic continuum ヲ含ム。[7]

$\boxed{\text{定理22}}$ C ガ bounded perfectly indecomposable continuum ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ C ヲ disjoint ナ subcontinuum A, B ニ関スル atomic continuum ガ A, B ヲ同時ニ含ムコトデアル。シカシ斯ノ様ナ atomic continuum ハ unique ニ決マル。

(証明) 必要ナコト。前定理ヨリ明カ。充分ナコト, C ガ decomposable continuum D ヲ含メバ, 前ト同ジ様ニ, $D=H+K$ トカケル, $H \ni a$. $K \cdot a = 0$ ナル a ヲトレバ a ト K ニ関スル atomic continuum ヲ H ガ含ムカラ[7] コレハ假定ニ反スル。　(終)

§3. indecomposable continuum ノ hyperspace

§§ 1.2 ノ結果ヲ用ヰテ indecomposable continuum ソノ hyperspace ノ関係ヲ述ベヨウ[8]

indecomposable continuum ハ Kuratowski - Janiszewski

---

6) R.L. Moore: pt. set theory (1932) p.18

7) R.L. Moore: Loc. cit p.21. (Th. 34)

8) 本 § ニ関シテハ [illegible] Kelley ノ Trans. A. M. S (1942) 参照

ガ示シタ様ニ composant decomposition サレル。即チ

$$C=\rho(a,C)+\rho(b,C)+\cdots$$

$$\rho(a,C)\cdot\rho(b,C)=0$$

ココニ $\rho(a,C)$,…… ハ所謂 semi-continuum．シカモ composant ハ稠密デアル。[9]

$\boxed{\text{定理3.1}}$ $\rho(a.C)\equiv\rho(b.C)$ ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ a ト b トガ E ヨリ点 C ヲ除イタ空間 $E-C$ デ arc-wise ナルコト

（証明） $\rho(a.C)\equiv\rho(b.C)$ ナラバ a ト b トハ C ノ proper subcontinuum D デ結ベルカラ，a ト D トハ E 内デ C ヲ通ラナイ様ニ結ベル。又，b ト D トハ C ヲ通ラナイ様ニ simple arc デ結ベル。[10] 即チ，a ト b トハ E 内デ C ヲ通ラナイ simple arc デ結ベル。逆ニ a ト b トガ $E-C$ 内デ simple arc デ結ベタトスレバ，コレハ $0\leq t\leq 1$ ノ位相的ナ像デアル。即チ，一価連続函数 $x(t)$ ガ存在シテ，

$$a=x(0),\quad b=x(1),\quad C_t=x(t)+C\ (0<t<1)$$

ト書ケ，ナルトキ $C_u\neq C_v$ デアル
ニ対シテ $C_t\subset\rho(a.C)$ ヲ言ヘバヨイ。モシ
$C_t-\rho(a,C)\neq 0$ トスレバ コノ C_t ハ二ツノ composant ノ共通点ヲ持ツ ソレ故ニ，composant ノ性質カラ $C_t=C$ トナラネバナラヌ。スベテノ t ニ対シテ $C_t\subset\rho(a.C)$ 即チ $b\in\rho(a.C)$ 従ッテ $\rho(a.C)\equiv\rho(b.C)$。

$\boxed{\text{定理3.2}}$ C ガ indecomposable continuum ナルタメノ必要且充分條件ハ $E-C$ ガ arc-wise デナイコト。

（証明） $E-C$ ガ arc-wise ナラバ，定理3.1ニヨリ composant ハ唯一ツニナル。コレハ，少ナクトモ二ツ以上アルコトニ反スル。逆ニモシ C ガ decomposable ナラバ，$C=A+B$ ナル二ツノ proper subcontinuum $A.B$ デアルカラ，A ト B トハ C ヲ通ラナイ様ニ simple arc

---

9) Kuratowski - Knaster F.M. vol 1. S Mazurkiewicz F.M. vol 10
10) Mazurkiewicz et Borsuk loc cit

デ結ベル $\mathcal{E}-\mathcal{C}$ 内ノ任意ノ点ガ A ヲ，D ト $\mathcal{E}-\mathcal{C}$ 内デ simple arc デ結ベルコトニナル。即チ，$\mathcal{E}-\mathcal{C}$ 内ノ二点ハ simple arc デ結ベル コレハ不合理．

定理 7.3　C ガ perfectly indecomposable continuum ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ，C ノ hyperspace $\mathcal{E}$ ガ acyclic ナルコト

（証明）充分ナコト。C ガ perfectly indecomposable デナケレバ，C ハ decomposable continuum D ヲ含ム。$D=A+B$ トカケルカラ，A ト B トハ D ヲ通ラナイ様ニ simple arc デ結ベル。A ト D トハ B ヲ通ラナイ様ニ B ト D トハ A ヲ通ラナイ様ニ，simple arc デ結ベル。コレハ $\mathcal{E}$ ガ simple closed curve ヲ含ム事ニナリ，acyclic ナルコトニ反スル。

必要ナコト．$\mathcal{E}$ ノ二点 A・B ガ $A\subset B$ ナルトキ，A，B ヲ結ブ simple arc ヲ $\{C_t\}_{0\leq t\leq 1}$，$C_0=A$，$C_1=B$ トスル。$\{C_t\}_{0\leq t\leq 1}$ ノ C ヘノ projection ヲ H トスレバ，H ハ定理 1.2 ニヨリ，continuum ニナル。故ニ H ハ indecomposable [illegible]，A ト C トハ H ヲ通ラズニ simple arc デ結ベル。又，H ヲ a トスレバ，$a\in C_t$ ナル C_t ガアルカラ，a ト C_t トハ H ヲ通ラナイ simple arc デ結ベル。結局定理 3.2 ニヨリ，H ガ decomposable デナケレバナラヌ。故ニ A ト B トヲ結ブ arc ハ必ズソノ arc ノ projection デアル continuum ノ点ヲ通ル，故ニ，スベテノ t ニ対シテ，$C_t\subset B$ デアル。モシ B ガ H ノ proper subcontinuum ナラバ，$A\subset B$ ナル故ニ H ヲ通ラナイ arc ガアルコトニナル。コレハ不合理。依ッテスベテノ C_t ニ対シテ $C_t\subset B$。次ニスベテノ C_t ハ A ヲ含ムコトヲ証明スル。A ヲ含ム $C_t\,(0\leq t\leq\alpha)$ ノ全体ノ C ヘノ projection ノ closure ハ C_α ニ一致スル。モシ C_α ニ一致シナケレバ，A ヲ含ム更ニ他ノ $C_t\,(0\leq t\leq\alpha)$ ガ見出サレル。故ニ，$A\subset C_\alpha$，故ニ C ノ perfect ヨリ，$\{C_t\}_{0\leq t\leq 1}$ ハ inclusion ニ関シテ [illegible] 各ルニ A ヲ含ミ B ニ含マ

レルスベテノ subcontinuum ハ C_i ノ perge ナルコトヨリ A ト B ヲ結ブ simple arc ヲ作ッテヰル 故 $\{C_i\}$ 集合ノ arc ニ一致セネバナラズ、又 A, B ガ、A B = 0 ナル C ノ subcontinuum ナラバ、A・B = 関スル C ノ atomic continuum ヲトレバ、定理 2.2 以上ノ事項ニヨリ A ト D, D ト B ヲ結ブ arc ガ唯一ツノ A, B ヲ結ブ arc ニナル。 (終)

特ニ注意スベキハ、Euclid 平面ノ単位正方形 S ニ関スル hyperspace Σ 内デ、S 内ニアル perfecty indecomposable continuum ノ集ハ、2nd category ニナク[12] decomposable continuum ノ集ハ、1st category ノ集集合ヲ作ッテヰル。(コノ後者ノ事実ハ容易ニ証明サレルコトデアルガ) 然ルニ一方 S 内ノ Jordan continuum 全体ハ Σ 内デ dense ナ集合ヲ作ッテヰル (コレハ任意ノ continuum ヲトレバソレガ Jordan continuum ノ列ノ極限デ表ハサレルト云フコトカラ知ラレル。)

---

11) S. Mazurkiewicz ; F.M. vol 14 pp 172-3

12) S. Mazurkiewicz ; F.M. vol 16 p. 151.